# Fonctions et suites de fonctions, récurrence - Enoncés des Exercices

## Exercice n°1 :

Montrez que la droite d'équation $x = -1$ est un axe de symétrie pour la courbe représentative de la fonction $f$ définie sur IR par $f(x) = x^2 - 2x - 1$.

## Exercice n°2 :

Soit $f$ la fonction définie sur $]-\infty; 3[ \cup ]3; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x-3} + 2$.

1°) Montrez que I(3, 2) est un centre de symétrie pour $C_f$.

2°) Calculez l'équation de $C_f$ dans le repère $(I;\vec{i},\vec{j})$.

## Exercice n°3 :

Représentez graphiquement la suite définie par,

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \dfrac{3U_n + 4}{U_n + 1} \end{cases}$$

et déterminez quel est le nombre vers lequel les termes de la suite convergent.

## Exercice n°4 :

Soit la suite $(U_n)$ définie par la donnée de $U_0 = 1$ et $U_1 = 2$ et par $3U_{n+2} = 4U_{n+1} - U_n$.
Montrez par récurrence que,

$$\text{pour tout } n \geq 1,\ U_n = \frac{1}{2}\left(5 - \frac{1}{3^{n-1}}\right).$$

**Fonctions et suites de fonctions, récurrence - Correction des exercices**

## Exercice n°1 :

D'après le cours, nous devons démontrer que, si $x \in D_f$ alors $2 - x \in D_f$, et que, pour tout $x \in D_f$, $f(2 - x) = f(x)$.

D'après l'énoncé, $D_f = \mathbb{R}$, donc, lorsque $x$ est réel, $2 - x$ l'est aussi.

Calculons $f(2 - x)$.

$f(2 - x) = (2 - x)^2 - 2(2 - x) - 1 = 4 - 4x + x^2 - 4 + 2x - 1 = x^2 - 2x - 1 = f(x)$.

La droite d'équation $x = 1$ est bien un axe de symétrie pour la courbe représentative de $f$.

## Exercice n°2 :

1°) Nous devons démontrer que si $x \in D_f$ alors $6 - x \in D_f$ et que, pour tout $x \in D_f$ $\dfrac{f(6-x)+f(x)}{2} = 2$.

Si $x \neq 3$ alors $6 - x \neq 3$, donc si $x$ appartient à $D_f$, $6 - x$ y appartient aussi.

Calculons $\dfrac{f(6-x)+f(x)}{2}$.

$$\frac{f(6-x)+f(x)}{2} = \frac{\dfrac{1}{6-x-3}+2+\dfrac{1}{x-3}+2}{2} = \frac{\dfrac{1}{3-x}-\dfrac{1}{3-x}+4}{2} = 2.$$

D'après le cours, le point I(3, 2) est centre de symétrie de la courbe représentative de $f$.

2°) Calculons l'équation de $C_f$ dans le nouveau repère $(I;\vec{i},\vec{j})$. Soit un point $M$ de coordonnées $x$ et $y$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ et de coordonnées $X$ et $Y$ dans le repère $(I;\vec{i},\vec{j})$.

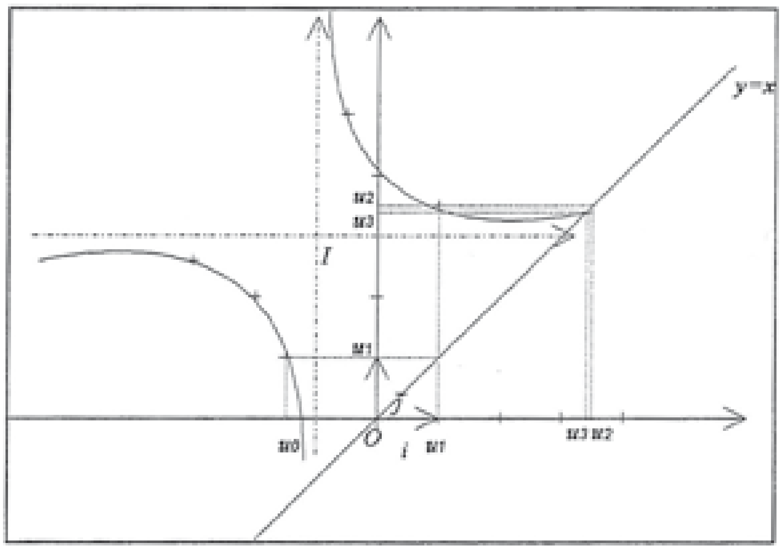
Nous savons que $\begin{cases} X = x-3 \\ Y = y-2 \end{cases}$ et donc que $\begin{cases} x = X+3 \\ y = Y+2 \end{cases}$. Remplaçons les valeurs de $x$ et $y$ dans l'équation $y = \dfrac{1}{x-3} + 2$.

$Y + 2 = \dfrac{1}{X+3-3} + 2$, alors $\boxed{Y = \dfrac{1}{X}}$ est l'équation de la courbe dans le repère $(I;\vec{i},\vec{j})$.

<u>Exercice n°3 :</u>

Afin de tracer cette suite de fonction, remarquons que $U$ est de la forme $U_{n+1} = f(U_n)$, où $f$ est la fonction définie sur IR-{-1} par, $f(x) = \dfrac{3x+4}{x+1}$. Nous allons donc tracer cette fonction dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Remarquons que $f(x) = \dfrac{3x+4}{x+1} = \dfrac{3x+3+1}{x+1} = \dfrac{1}{x+1} + 3$. Cette fonction est l'équation d'une hyperbole, qui a comme équation $y = \dfrac{1}{x}$ dans le repère $(I;\vec{i},\vec{j})$ où I a comme coordonnées (-1, 3). Nous pouvons donc placer I, tracer le nouveau repère, tracer la droite d'équation $y = x$ et tracer $C_f$. Plaçons alors les termes $U_0$, $U_1$, $U_2$, et $U_3$.



Nous remarquons que les termes de la suite convergent vers le point d'intersection de $C_f$ avec $y = x$. Ses coordonnées vérifient alors,

$$\begin{cases} y = x \\ y = \dfrac{3x+4}{x+1} \end{cases}$$

En résolvant ce système, nous obtenons $\dfrac{3x+4}{x+1} = x$, c'est-à-dire, $3x + 4 = x(x + 1)$, ou encore $x^2 - 2x - 4 = 0$. Les solutions sont $1+\sqrt{5}$ et $1-\sqrt{5}$. Comme nous savons que les termes convergent vers un réel positif, la racine qui convient est $1+\sqrt{5}$.

**Exercice n°4 :**

Soit $P_n$ la proposition " Pour tout $n \geq 1$, $U_n = \dfrac{1}{2}\left(5 - \dfrac{1}{3^{n-1}}\right)$ ".

Vérifions que $P_1$ est vraie. Pour cela, calculons $\dfrac{1}{2}\left(5 - \dfrac{1}{3^{n-1}}\right)$ avec $n = 1$ :

$$\frac{1}{2}\left(5 - \frac{1}{3^{1-1}}\right) = \frac{1}{2}(5-1) = 2,$$

c'est bien égal à $U_1$.

Supposons que $P_n$ et $P_{n+1}$ sont vraies et montrons que $U_{n+2} = \dfrac{1}{2}\left(5 - \dfrac{1}{3^{n+1}}\right)$.

Nous savons que, $3U_{n+2} = 4U_{n+1} - U_n$. Remplaçons dans cette équation $U_{n+1}$ et $U_n$ par leur valeur. Alors, il reste que,

$$3U_{n+2} = 4\times\frac{1}{2}\left(5 - \frac{1}{3^n}\right) - \frac{1}{2}\left(5 - \frac{1}{3^{n-1}}\right),$$

$$U_{n+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{20}{3} - \frac{4}{3^{n+1}} - \frac{5}{3} + \frac{1}{3^n}\right) = \frac{1}{2}\left(5 - \frac{1}{3^{n+1}}\right).$$

La proposition $P_{n+2}$ est donc vérifiée. Nous avons bien, " Pour tout $n \geq 1$, $U_n = \dfrac{1}{2}\left(5 - \dfrac{1}{3^{n-1}}\right)$".