Arithmétique 1

Autotest 1

Déterminer les nombres entiers n tels que la fraction $\frac{n+17}{n+4}$ soit entière.

Correction autotest 1

On peut écrire $n+17=n+4+13$, donc :

$$\frac{n+17}{n+4}=\frac{n+4+13}{n+4}=\frac{n+4}{n+4}+\frac{13}{n+4}=1+\frac{13}{n+4}$$

Pour que la fraction soit un nombre entier, il faut et il suffit que 13 soit un multiple de $n+4$, ou encore que $n+4$ soit un diviseur de 13. Or 13 ne possède que 4 diviseurs : -13, -1, 1 et 13. Les valeurs correspondantes de $n+4$ sont :

- $n+4=-13$, d'où $n=-17$,
- $n+4=-1$, d'où $n=-5$,
- $n+4=1$, d'où $n=-3$,
- $n+4=13$, d'où $n=9$.

Autotest 2

Montrer que pour tout $n\neq -8$, la fraction $\frac{2n+15}{n+8}$ est irréductible.

Correction autotest 2

La fraction $\frac{2n+15}{n+8}$ est irréductible si les entiers $2n+15$ et $n+8$ sont premiers entre eux. Soit d un diviseur commun de $2n+15$ et de $n+8$; d divise toute combinaison linéaire entière de $2n+15$ et de $n+8$, en particulier $1\times(2n+15)-2\times(n+8)=-1$, donc $d=-1$ ou $d=1$. Les entiers $2n+15$ et $n+8$ sont donc premiers entre eux, et la fraction est irréductible pour tout $n\neq -8$.

Autotest 3

Démontrer que, pour tout entier naturel n, $n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 3

Correction autotest 3

Posons $a=n(n+1)(2n+1)$; il s'agit de prouver que a est divisible par 3, donc que $a=3q$, avec q entier. Or, tout naturel n s'écrit $3p$, ou $3p+1$, ou $3p+2$ (il suffit d'effectuer la division euclidienne de n par 3). On étudie les trois cas :

- si $n=3p$, on a $a=3p(n+1)(2n+1)=3q_1$;
- si $n=3p+1$, alors $2n+1=6p+3$ et $a=3n(n+1)(2p+1)=3q_2$;
- si $n=3p+2$, alors $n+1=3p+3$ et $a=3n(p+1)(2n+1)=3q_3$.

Donc, dans les trois cas, a est divisible par 3.

Autotest 4

Déterminer a, b, c entiers tels que : $\frac{59}{3^2}=a+\frac{b}{3}+\frac{c}{3^2}$, avec $0\leq b<3$ et $0\leq c<3$.

Correction autotest 4

L'égalité $\frac{59}{3^2}=a+\frac{b}{3}+\frac{c}{3^2}$ peut aussi s'écrire $59=9a+3b+c=3(3a+b)+c$; ayant $0\leq c<3$, cette relation est celle de la division euclidienne de 59 par 3 avec $3a+b$ pour quotient et c pour reste ; comme $59=3\times 19+2$, on en déduit $3a+b=19$ et $c=2$. On « recommence » ! L'égalité $19=3a+b$ avec $0\leq b<3$ n'est autre que la division euclidienne de 19 par 3 avec a pour quotient et b pour reste ; comme $19=3\times 6+1$, on en déduit $a=6$ et $b=1$. En définitive, $a=6$, $b=1$ et $c=2$, d'où :

$$\frac{59}{3^2}=6+\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}$$

Autotest 5

Effectuer la division euclidienne de $a=37$ par $b=-11$.

Correction autotest 5

On écrit $37=11\times 3+4$, d'où $37=(-11)\times(-3)+4$. On a donc $q=-3$ et $r=4$ ($r=4<|-11|$).

Autotest 6

Les congruences suivantes sont-elles exactes : $132\equiv 47\ (15)$; $-209\equiv 131\ (28)$; $1214\equiv -8\ (44)$; $899\equiv -1\ (45)$.

Correction autotest 6

On revient à la définition :

- $132-47=85=5\times 15+10$; $(132-47)$ n'est pas divisible par 15, donc on n'a pas $132\equiv 47\ (15)$;

- $-209-131=-340=-12\times 28-4$; $(-209-131)$ n'est pas divisible par 28, donc on n'a pas $-209\equiv 131\ (28)$;

- $1214-(-8)=1222=27\times 44+34$; $(1214-(-8))$ n'est pas divisible par 44, donc on n'a pas $1214\equiv -8\ (44)$;

- $899-(-1)=900=20\times 45$; $(899-(-1))$ est divisible par 45, donc on a $899\equiv -1\ (45)$; enfin !

Autotest 7

Soient x et y deux entiers naturels tels que $x\equiv 7\ (9)$ et $y\equiv 4\ (9)$. Déterminer les restes dans la division par 9 de : $3x+4y$; x^2+y^2 ; $2x^2-5y^2$.

Correction autotest 7

Tout simple ! Il suffit d'appliquer les règles relatives aux congruences.

- $x\equiv 7\ (9)$ et $y\equiv 4\ (9)$ entraînent $3x+4y\equiv 3\times 7+4\times 4=37=4\times 9+1\equiv 1\ (9)$, donc $3x+4y\equiv 1\ (9)$; le reste de la division par 9 de $3x+4y$ est 1.

- $x \equiv 7\ (9)$ et $y \equiv 4\ (9)$ entraînent $x^2 + y^2 \equiv 7^2 + 4^2 = 65 = 7 \times 9 + 2 \equiv 2\ (9)$, donc $x^2 + y^2 \equiv 2\ (9)$; le reste de la division par 9 de $x^2 + y^2$ est 2.

- $x \equiv 7\ (9)$, $y \equiv 4\ (9)$ entraînent $2x^2 - 5y^2 \equiv 2 \times 7^2 - 5 \times 4^2 = 18 = 2 \times 9 \equiv 0\ (9)$, donc $2x^2 - 5y^2 \equiv 0\ (9)$; le reste de la division par 9 de $2x^2 - 5y^2$ est 0.

Autotest 8

Démontrer le critère de divisibilité par 37 (indication : calculer le reste de la division de 1000 par 37).

Correction autotest 8

On a $1000 = 27 \times 37 + 1$, donc $1000 \equiv 1\ (mod\ 37)$ et, de manière générale, pour $p \in \mathbb{N}$, $1000^p \equiv 1\ (mod\ 37)$. Séparons le nombre $a = \overline{a_n a_{n-1} \ldots\ldots\ldots\ldots a_2 a_1 a_0}$ par tranches de trois chiffres en partant des unités ; il s'écrit alors :

$$a = \ldots\ldots(1000)^2 \times \overline{a_8 a_7 a_6} + (1000) \times \overline{a_5 a_4 a_3} + \overline{a_2 a_1 a_0}$$

On en déduit que

$$a \equiv \ldots\ldots + \overline{a_8 a_7 a_6} + \overline{a_5 a_4 a_3} + \overline{a_2 a_1 a_0}\ (mod\ 37)$$

Le critère de divisibilité par 37 est donc le suivant : pour vérifier si un nombre $a = \overline{a_n a_{n-1} \ldots\ldots\ldots\ldots a_2 a_1 a_0}$ est divisible par 37, on sépare ce nombre par tranches de trois chiffres en partant des unités, et en insérant des « + » entre les tranches. On effectue l'opération ainsi décrite et, si le résultat est divisible par 37, alors le nombre considéré est divisible par 37.

Autotest 9

Convertir en décimal le nombre suivant écrit en binaire $x = 100110,0101$.

Correction autotest 9

On obtient :

$$x = 1\times 2^5 + 0\times 2^4 + 0\times 2^3 + 1\times 2^2 + 1\times 2^1 + 0\times 2^0 + 0\times 2^{-1} + 1\times 2^{-2} + 0\times 2^{-3} + 1\times 2^{-4}$$

$$x = 32 + 4 + 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = 38,3125$$

Autotest 10

Convertir le nombre décimal $x = 1443,984375$ en hexadécimal.

Correction autotest 10

On applique la méthode en disposant les calculs comme suit :

1443	*90*	*5*
(3)	*(10)*	*(5)*
	(A)	

5A3

0,984375	*0,75*
(15)	*(12)*
(F)	*(C)*

FC

En hexadécimal, x s'écrit donc ***5A3,FC***.

le quotient à droite, $1443 = 16 \times 90 + 3$, d'où :

1443	90
3	

Puis $90 = 16 \times 5 + 10$, d'où :

90	5
10	

Pour la partie décimale, on a multiplié successivement par 16 en notant la partie entière en dessous et la partie décimale à droite, $0,984375 \times 16 = 15,75$, d'où :

$0,984375$	$0,75$
10	

Puis $0,75 \times 16 = 12$, d'où :

$0,75$	0
12	

Ensuite, on a remplacé 10 par A, 15 par F et 12 par C. Finalement on obtient bien $5A3,FC$.

Autotest 11

Convertir le nombre binaire $x = 10001100,11001$ en octal.

Correction autotest 11

On fait des « tranches » de ***3*** de part et d'autre de la virgule en ajoutant, si besoin est, des ***0*** à droite comme à gauche :

$$\begin{array}{cccccc} \mathbf{010} & \mathbf{001} & \mathbf{100} & , & \mathbf{110} & \mathbf{010} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{4} & , & \mathbf{6} & \mathbf{2} \end{array}$$

Donc, en système octal, $\boldsymbol{x}$ s'écrit ***214,62.***

Autotest 12

Convertir le nombre binaire $\boldsymbol{x = 1001,10001}$ en hexadécimal.

Correction Autotest 12

On fait des « tranches » de ***4*** de part et d'autre de la virgule en ajoutant, si besoin est, des ***0*** (ici, uniquement à droite) :

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{1001} & , & \mathbf{1000} & \mathbf{1000} \\ \mathbf{9} & , & \mathbf{8} & \mathbf{8} \end{array}$$

Donc, en système hexadécimal, $\boldsymbol{x}$ s'écrit ***9,88***.

Arithmétique 1

1. Soient a et b deux entiers naturels. Démontrer que le nombre $ab\left(a^2-b^2\right)$ est divisible par 3.

✎✎✎✎✎

2. Soit n nombre entier naturel.

2.a Démontrer que $2^{n+3}-2^n \equiv 0 \left(mod\ 7\right)$.

2.b Déterminer les restes de la division de 2^n par 7 ; en déduire le reste de la division par 7 de 44^{2003}.

2.c Démontrer que $9^n \equiv 2^n \left(mod\ 7\right)$; en déduire le reste de la division par 7 de $2^{999}\times 9^{222}$.

✎✎✎✎✎

3.a Démontrer que si trois entiers relatifs a, b et c sont tels que la somme $a^3+b^3+c^3 \equiv 0 \left(mod\ 3\right)$, alors la somme $a+b+c \equiv 0 \left(mod\ 3\right)$.

3.b Soit a un entier relatif non multiple de 3 ; démontrer que $a^3 \equiv -1 \left(mod\ 3\right)$ ou $a^3 \equiv 1 \left(mod\ 3\right)$.

3.c Démontrer que si $a^3+b^3+c^3 \equiv 0 \left(mod\ 9\right)$, alors l'un au moins des nombres a, b ou c est divisible par 3.

Arithmétique 1

4. Quand on le divise par 4, le reste est 3, mais quand on le divise par 5, le reste est 1 et le quotient inchangé. Quel est ce nombre ?

✐✐✐✐✐

5. Ecrire le nombre décimal ***243,287*** en système binaire.

✐✐✐✐✐

6. Ecrire en base deux le nombre écrit ***356*** en base huit.

Arithmétique 1

1. Soient a et b deux entiers naturels. On veut démontrer que le nombre $ab\left(a^2-b^2\right)$ est divisible par 3. On va « passer en revue » les différentes possibilités.

- Si l'un au moins des nombres a et b est congru à 0 modulo 3, alors le nombre est évidemment divisible par 3.

- Si un nombre entier naturel x n'est pas congru à 0 modulo 3, alors il est nécessairement de la forme $x=3k+1$ ou $3k+2$ et, dans chacun des cas, le nombre x^2 est congru à 1 modulo 3, puisque :

$$x \equiv 1 \ (mod\ 3) \rightarrow x^2 \equiv 1^2 = 1 \ (mod\ 3) \text{ ou } x \equiv 2 \ (mod\ 3) \rightarrow x^2 \equiv 2^2 = 4 \equiv 1 \ (mod\ 3)$$

Donc, si aucun des nombres a et b n'est congru à 0 modulo 3, alors les nombres a^2 et b^2 sont congrus à 1 modulo 3, et, par suite, $\left(a^2-b^2\right)$ est divisible par 3.

En conclusion, quels que soient les deux entiers naturels a et b, le nombre $ab\left(a^2-b^2\right)$ est divisible par 3.

✐✐✐✐✐

2. Soit n nombre entier naturel.

2.a On veut démontrer que $2^{n+3}-2^n \equiv 0 \ (mod\ 7)$; il suffit d'écrire :

$$2^{n+3}-2^n = 2^n\left(2^3-1\right) = 2^n\left(8-1\right) = 2^n \times 7$$

On en déduit que $\left(2^{n+3}-2^n\right)$ est divisible par 7 et donc que $2^{n+3}-2^n \equiv 0 \ (mod\ 7)$.

2.b Pour déterminer les restes de la division de 2^n par 7, on pourrait examiner tous les cas en faisant sucessivement $n=1$, puis $n=2$, puis $n=3$, etc., mais la question précédente ayant montré que $2^{n+3} \equiv 2^n \pmod 7$, il est naturel de poser $n=3k+r$, avec $r \in \{0;1;2\}$, ce qui permet de se limiter à 3 essais ; on en déduit :

- pour $n=3k$, $2^n = 2^{3k} = 8^k \equiv 1 \pmod 7$
- pour $n=3k+1$, $2^n = 2^{3k+1} = 2 \times 8^k \equiv 2 \pmod 7$
- pour $n=3k+2$, $2^n = 2^{3k+2} = 4 \times 8^k \equiv 4 \pmod 7$

Par ailleurs, $44 = 7 \times 6 + 2 \equiv 2 \pmod 7$ et $2003 = 3 \times 667 + 2 \equiv 2 \pmod 3$; on en déduit que $44^{2003} \equiv 2^{2003} \pmod 7$ et que $2^{2003} \equiv 4 \pmod 7$; le reste de la division par 7 de 44^{2003} est donc 4.

2.c On a $9 \equiv 2 \pmod 7$, donc, pour tout entier naturel n, $9^n \equiv 2^n \pmod 7$. Par ailleurs, $999 = 3 \times 333$, donc $2^{999} \equiv 1 \pmod 7$ (cf. question précédente) et $222 = 3 \times 74$, donc $9^{222} \equiv 1 \pmod 7$. En conclusion, $2^{999} \times 9^{222} \equiv 1 \pmod 7$.

✎✎✎✎✎

3.a On veut démontrer que si trois entiers relatifs a, b et c sont tels que la somme $a^3+b^3+c^3 \equiv 0 \pmod 3$, alors la somme $a+b+c \equiv 0 \pmod 3$. On écrit :

$$a^3 - a = a\left(a^2-1\right) = a(a-1)(a+1) = (a-1)a(a+1)$$

$a^3 - a$ est donc le produit de trois entiers consécutifs ; l'un de ces nombres est nécessairement un multiple de 3, donc $a^3 - a \equiv 0 \pmod 3$, ou encore $a^3 \equiv a \pmod 3$; le même raisonnement pour b et c permet d'écrire en faisant la somme $a^3+b^3+c^3 \equiv a+b+c \pmod 3$.

Donc, si la somme $a^3+b^3+c^3$ est divisible par 3, alors la somme $a+b+c$ est également divisible par 3.

3.b Si a est un entier relatif non multiple de 3, il peut s'écrire $a=3k+1$ ou $a=3k+2$ ($k \in \mathbb{N}$), donc :

- si $a=3k+1$: $a^3=(3k+1)^3=27k^3+27k^2+9k+1$, donc $a^3 \equiv 1\ (mod\ 3)$
- si $a=3k+2$: $a^3=(3k+2)^3=9k^3+54k^2+36k+8$, donc $a^3 \equiv 8 \equiv -1\ (mod\ 3)$

On a donc bien $a^3 \equiv -1\ (mod\ 3)$ ou $a^3 \equiv 1\ (mod\ 3)$.

3.c Supposons qu'aucun des entiers a, b ou c ne soient multiples de 3. Il résulte de la question précédente que les restes de la division par 9 de la somme $a^3+b^3+c^3$ sont -3, -1, 1 ou 3 ; cette somme n'est donc pas divisible par 9. Par contraposition, on en déduit que si $a^3+b^3+c^3 \equiv 0\ (mod\ 9)$, alors l'un au moins des nombres a, b ou c est divisible par 3.

✐✐✐✐✐

4. Il suffit de « traduire » l'énoncé en « division euclidienne ». Soit n le nombre cherché ; on a :

$$n=4q+3 \quad \text{et} \quad n=5q+1$$

On en déduit immédiatement $4q+3=5q+1$, soit $q=2$ et $n=11$. Pas trop difficile ?

✐✐✐✐✐

5. On va, pour simplifier, traiter séparément la partie entière $x_1=243$ et la partie décimale $x_2=0,287$.

On dispose les calculs comme suit pour les divisions successives par ***2*** :

243	***121***	***60***	***30***	***15***	***7***	***3***	***1***
(1)	***(1)***	***(0)***	***(0)***	***(1)***	***(1)***	***(1)***	***(1)***

La flèche indique l'ordre dans lequel on doit prendre les restes ***0*** ou ***1*** pour les écrire ensuite de gauche à droite :

$$x_1 = 11110011$$

Pour la partie décimale, on dispose les calculs comme suit pour les multiplications successives par ***2*** :

0,287	***0,574***	***0,148***	***0,296***	***0,592***	***0,184***	***0,368***	***0,736***	***0,472***
(0)	***(1)***	***(0)***	***(0)***	***(1)***	***(0)***	***(0)***	***(1)***	

Nous arrêterons cette suite d'opérations qui peut se poursuivre indéfiniment et nous écrirons :

$$x_2 = 0,01001001.....$$

La flèche indique l'ordre d'écriture, de gauche à droite après la virgule, des chiffres obtenus. En regroupant, on obtient finalement : $x = 11110011,01001001...$

✐✐✐✐✐

6. La conversion en base deux d'un nombre écrit en base huit est une des plus faciles : il suffit de substituer à chacun des chiffres sa représentation en binaire :

$$3 \to 11 \qquad 5 \to 101 \qquad 6 \to 110$$

donc $(356)_8 = (11101110)_2$.

Vous avez terminé l'étude de la série 1 du cours BBBD66. Vous pouvez à présent réaliser le devoir 1 à envoyer à la correction, page 5 du fascicule de devoirs BBBD66d.