



Généralités sur les ensembles

Soit A un ensemble de nombres.

A^* signifie que l'on considère A sauf $\{0\}$. Autre notation $A^* = A - \{0\}$

A^+ signifie que l'on considère l'ensemble des éléments positifs de A .

A^- signifie que l'on considère l'ensemble des éléments négatifs de A .

1.1. Ensembles de nombres

\mathbb{N} est l'ensemble des entiers naturels.

$$\mathbb{N} = [0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; \dots]$$

\mathbb{Z} est l'ensemble des entiers relatifs.

$$\mathbb{Z} = [\dots ; -6 ; -5 ; -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; \dots]$$

\mathbb{D} est l'ensemble des décimaux (les nombres possédant une partie décimale après la virgule).

$$\mathbb{D} = [\dots ; -6,5 ; \dots ; -4,333 ; \dots ; -2,3 ; \dots ; 2,00 ; \dots ; 8,75 ; \dots]$$

Un **décimal** est un nombre à virgule dont la partie décimale est finie ou dont l'écriture fractionnaire ne comporte que des puissances de 2 ou 5 au dénominateur.

\mathbb{Q} est l'ensemble des rationnels.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \text{ avec } a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

$$\text{Exemple : } -\frac{3}{7} \text{ et } \frac{2}{9} \in \mathbb{Q}$$

\mathbb{R} est l'ensemble des réels.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \text{ complété par les nombres irrationnels.}$$

Un **irrationnel** est un nombre construit à l'aide des 4 opérations à partir des radicaux (ou racines) ou des nombres tels que π .

1.2. Inclusions

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

On dit qu'un ensemble A est inclus (\subset) dans un ensemble B quand tous les éléments de A sont aussi éléments de B . On peut aussi utiliser le signe \in qui signifie « appartient à ».

1.3. Exemples

- $4 \in \mathbb{N}$
- $\sqrt{49} \in \mathbb{N}$ car $\sqrt{49} = 7$
- $(-4) \in \mathbb{Z}$
- $\frac{5}{8} = 0,625 \in \mathbb{D}$
- $\sqrt{13} \in \mathbb{R}$



Rappels sur les fractions

3.2.1. Addition et soustraction de fractions

La méthode pour réaliser une addition ou une soustraction de 2 fractions est la suivante :

1. on simplifie les fractions données (si l'on peut) ;
2. on cherche des fractions équivalentes aux précédentes ayant le même dénominateur ;
3. on effectue les opérations demandées sur les fractions ayant le même dénominateur ;
4. on simplifie, si l'on peut, la fraction obtenue.

Exemple avec $\frac{80}{120} - \frac{135}{225}$:

1. $\frac{80}{120} = \frac{2}{3}$ et $\frac{135}{225} = \frac{3}{5}$;
2. $DC = 3 \times 5 = 15$; on utilisera donc les fractions $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$ et $\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$;
3. $\frac{10}{15} - \frac{9}{15} = \frac{10-9}{15} = \frac{1}{15}$;
4. $\frac{1}{15}$ est une fraction irréductible.

3.2.2. Multiplication de fractions

La méthode pour réaliser une multiplication de 2 fractions est la suivante :

1. on simplifie les fractions données (si l'on peut) ;
2. on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux ;
3. on simplifie, si l'on peut, la fraction obtenue.

Exemple avec $\frac{35}{9} \times \frac{81}{7}$:

1. les fractions sont irréductibles ;
2. $\frac{35}{9} \times \frac{81}{7} = \frac{35 \times 81}{9 \times 7} = \frac{2835}{63}$;
3. $\frac{2835}{63} = \frac{5 \times 7 \times 9 \times 9}{9 \times 7} = 45$.

3.2.3. Division de fractions

La méthode pour réaliser une division de 2 fractions est la suivante :

1. on simplifie les fractions données (si l'on peut) ;
2. on multiplie la première fraction par l'inverse de la deuxième ;
3. on simplifie, si l'on peut, la fraction obtenue.

Exemple avec $\frac{3}{4} \div \frac{5}{8}$:

1. les fractions sont irréductibles ;
2. $\frac{3}{4} \div \frac{5}{8} = \frac{3}{4} \times \frac{8}{5} = \frac{3 \times 8}{4 \times 5} = \frac{24}{20}$;
3. $\frac{24}{20} = \frac{3 \times 4 \times 2}{4 \times 5} = \frac{6}{5}$.



Polynômes du second degré

3.1. Expression générale

Ce sont les polynômes de la forme $ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

Exemples :

- | | | | | |
|--------------------|---------------|----------|----------|----------|
| • $2x^2 - x - 3$ | \Rightarrow | $a = 2$ | $b = -1$ | $c = -3$ |
| • $-9x^2 + x + 12$ | \Rightarrow | $a = -9$ | $b = 1$ | $c = 12$ |
| • $x^2 + 3x$ | \Rightarrow | $a = 1$ | $b = 3$ | $c = 0$ |
| • $2x^2 - 1$ | \Rightarrow | $a = 2$ | $b = 0$ | $c = -1$ |
| • $4x^2$ | \Rightarrow | $a = 4$ | $b = 0$ | $c = 0$ |

3.2. Racines d'un polynôme du second degré

Un polynôme du second degré admet :

- soit deux racines distinctes ;
- soit deux racines identiques (on dit que c'est une racine double) ;
- soit aucune racine.



Règle

Soit le polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$.

Il faut calculer la quantité Δ dite « delta » que l'on appelle « discriminant » et qui est égal à $b^2 - 4ac$.

On a, alors, 3 cas :

1. si $\Delta > 0$ alors le polynôme admet deux racines distinctes :

$$x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2. Si $\Delta = 0$ alors le polynôme admet une racine double : $x = \frac{-b}{2a}$

3. Si $\Delta < 0$ alors le polynôme n'a pas de racine.



Bases de la trigonométrie

Il faut être capable de convertir un angle dans n'importe quel type d'unité.

Cherchons par exemple quelle sera la valeur d'un angle de 30° en radians et en grades.

3.1. Première méthode : le produit en croix

On sait par exemple que 180° correspond à π rad. On peut établir le produit en croix suivant :

$$\begin{array}{l} 180^\circ \Leftrightarrow \pi \text{ rad} \\ 30^\circ \Leftrightarrow x \end{array} \quad \text{On obtient donc } x = \frac{30 \times \pi}{180} = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

On sait aussi, par exemple, que 360° correspond à 400 gon. On peut établir le produit en croix suivant :

$$\begin{array}{l} 360^\circ \Leftrightarrow 400 \text{ gon} \\ 30^\circ \Leftrightarrow x \end{array} \quad \text{On obtient donc } x = \frac{30 \times 400}{360} \approx 33,33 \text{ gon}$$

3.2. Deuxième méthode : formule générale

Plus généralement si α , β et δ sont les mesures en radians, degrés et grades d'un même angle, alors on a :

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\beta}{180} = \frac{\delta}{200} \quad (\text{formule correspondant à un angle plat})$$

Par exemple, si la mesure d'un angle est de 100 gon, pour savoir quelle est sa mesure en degrés et en radians, on utilise :

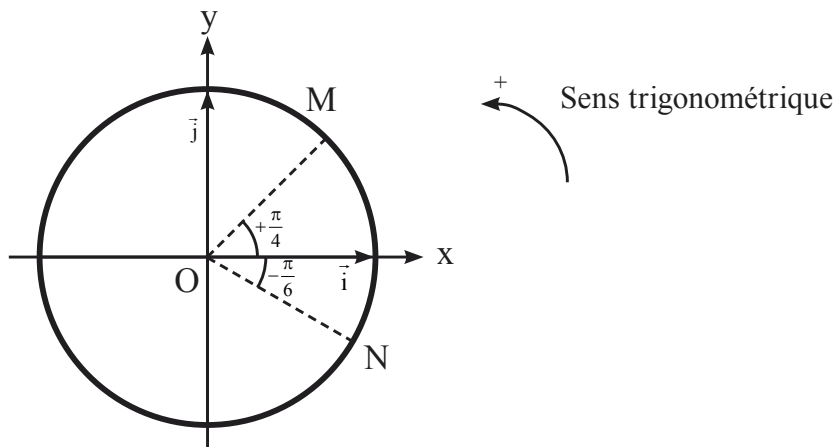
$$\begin{array}{l} \frac{\alpha}{\pi} = \frac{\delta}{200} \quad \text{avec } \delta = 100 \text{ gon,} \quad \text{d'où } \alpha = \frac{100}{200} \times \pi = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \\ \text{et } \frac{\beta}{180} = \frac{\delta}{200} \quad \text{avec } \delta = 100 \text{ gon,} \quad \text{d'où } \beta = \frac{100}{200} \times 180 = 90^\circ \end{array}$$

Nota : la formule employée reprend, en fait, le produit en croix ramené à l'angle plat.

4. LE CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE

4.1. Définition

Dans un plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on appelle cercle trigonométrique le cercle :





Nombres complexes

Afin de résoudre les équations comportant des carrés négatifs, les mathématiciens ont été amenés à agrandir l'ensemble des nombres réels.

Pour cela, ils ont dû créer de nouveaux nombres appelés « nombres complexes ».

Ils sont de la forme « $x + i \cdot y$ » où x et y sont des nombres réels et où i est un nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$.

On peut souligner notamment l'intérêt des nombres complexes dans les domaines de la physique s'intéressant aux signaux de forme sinusoïdale (courant alternatif, ondes acoustiques, ondes électromagnétiques, etc.).

2. DÉFINITIONS

2.1. Généralités

Ces éléments s'écrivent sous la forme $a + i \cdot b$:

- a et b sont des nombres réels ;
- i est un nouveau nombre défini par $i^2 = -1$.

Nous savons que les nombres réels sont souvent représentés par la variable x .

Afin de différencier les nombres réels des nombres complexes, on note ceux-ci par la lettre z :

$$z = a + i \cdot b \quad \text{avec } z \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \text{ et } i \in \mathbb{C}.$$

\mathbb{C} est l'ensemble des nombres complexes.

a est appelé « partie réelle de z » et b est appelé « partie imaginaire de z ».

Ainsi, on a les deux règles suivantes :

- si $a = 0$, z est dit « imaginaire pur » ;
- si $b = 0$, z est réel.

2.2. Remarque

Si $b = 0$, alors $z = a + 0i$. z est alors un nombre réel.

Tout nombre réel peut s'écrire comme étant un nombre complexe dont la partie imaginaire est nulle.

À cause de cela, l'ensemble \mathbb{R} est un sous-ensemble de \mathbb{C} (\mathbb{C} contient tous les nombres réels avec en plus tous les nombres imaginaires).

3. CALCULS SUR LES NOMBRES COMPLEXES

3.1. Généralités

Si $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ alors :

$$\begin{aligned} z + z' &= a + ib + a' + ib' \\ &= (a + a') + i(b + b') \end{aligned}$$